Министерство образования и науки РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада
2016-2017

ФИЗИКА

11 класс

II этап

Вариант 2

1. Шарик массой 100 г, изготовленный из алюминия, взвешивается на цифровых аналитических весах. Один раз взвешивание производится в сухом воздухе, второй раз – во влажном. Общее атмосферное давление в обоих случаях 100 кПа, температура - 20°С, давление насыщенного пара воды при 20°С – 2340 Па. Расхождение в показаниях весов составило 0,2 мг. Чему равна относительная влажность воздуха во втором случае? Плотность алюминия 2700 кг/м^3.

Решение:

Расхождение в показаниях весов - из-за того, что на груз действует сила Архимеда со стороны воздуха, а она в случае сухого и влажного воздуха будет разной (индекс с - сухой, в - влажный, Р - общее атмосферное давление, P_0 - давление насыщенного пара воды при 20°С, P_1- давление пара воды):

$$F_c = \rho_c Vg;\ F_в = \rho_B Vg$$

$$F_c - F_B = \Delta mg = Vg(\rho_c - \rho_B) => \Delta m = V(\rho_c - \rho_B) \qquad (1)$$ **(4 балла)**

Согласно уравнению состояния:

$$PV = \frac{m}{M}RT => P = \frac{\rho RT}{M} => \rho = \frac{PM}{RT}$$ **(1 балл)**

Для сухого воздуха:

$$\rho_c = \frac{P \cdot M_{возд}}{RT}$$

Для влажного воздуха:

$$\rho_в = \rho_{возд} + \rho_{пара}$$

$$\rho_{пара} = \frac{P_1 M_{пара}}{RT}; \quad \rho_{возд} = \frac{(P - P_1)M_{возд}}{RT}$$

$$=> \rho_в = \frac{P_1 M_{возд}}{RT} + \frac{(P - P_1)M_{возд}}{RT} = \frac{PM_{возд} - P_1(M_{возд} - M_{пара})}{RT}$$ **(3 балла)**

Подставляем в (1):

$$\Delta m = V \cdot \left(\frac{P \cdot M_{возд}}{RT} - \frac{PM_{возд} - P_1(M_{возд} - M_{пара})}{RT}\right) = V \cdot \frac{P_1(M_{возд} - M_{пара})}{RT}$$

Отсюда:

$$V = \frac{\Delta m \cdot R \cdot T}{P_1(M_{возд} - M_{пара})}$$ **(3 балла)**

Подстановка:

$$V = \frac{0{,}1\text{кг}}{2700\,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}} \approx 3{,}7 \cdot 10^{-5}(\text{м}^3)$$

$$0{,}2 \cdot 10^{-3} = 3{,}7 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{P_1 \cdot (29 - 18)}{8{,}31 \cdot 293}$$

(2 балла)

Отсюда

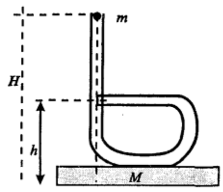
$$P_1 = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-3} \cdot 8{,}31 \cdot 293}{3{,}7 \cdot 10^{-5} \cdot 11} = 10^2 \cdot 12 = 1200\ (\text{Па})$$

Относительная влажность

$\varphi = \frac{1200}{2340} \cdot 100\% = 51\%$ **(2 балла)**

Ответ: 51%

2. На горизонтальном столе стоит подставка, на которой закреплена тонкая жёсткая изогнутая трубка (рисунок). Верхний конец трубки расположен на высоте $\boldsymbol{H}$ над столом. Высота горизонтального участка трубки над столом $\boldsymbol{h}$, а её конец лежит на одной вертикали с серединой верхнего конца. В верхний конец опускают без начальной скорости небольшой шарик массы $\boldsymbol{m}$. Найдите массу M подставки с трубкой, если расстояние, которое пролетел шарик по горизонтали после вылета из трубки до падения на стол равно $\boldsymbol{S}$. Трением пренебречь.



Решение:

Перед вылетом из трубки шарик некоторое время двигался горизонтально. Так как, по условию задачи, на систему трубка с подставкой и шарик никакие внешние силы в горизонтальном направлении не действуют, то на основании закона сохранения импульса центр масс трубки с подставкой и шарика должен сохранять своё положение в горизонтальном направлении до тех пор, пока шарик не упадёт на стол. Следовательно, в момент вылета шарика из трубки координата шарика по горизонтали должна быть такой же, что и в момент опускания шарика в верхний конец трубки.

(3 балла)

По закону сохранения импульса, импульс шарика и подставки с трубкой равны по модулю и имеют противоположные направления:

$$mv = MV\ . \qquad (1)$$ **(1 балл)**

Так как, система «шарик – подставка с трубкой» консервативна, то выполняется закон сохранения энергии:

$$mgH = \frac{mv^2}{2} + mgh + \frac{MV^2}{2}. \qquad (2) \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Расстояние, которое пролетел шарик по горизонтали после вылета из трубки до падения на стол равно:

$$S = vt. \qquad (3) \qquad \textbf{(1 балл)}$$

За это время шарик упал с высоты h на стол:

$$h = \frac{gt^2}{2}. \qquad (4) \qquad \textbf{(1 балл)}$$

Из (4) выразим время, подставим его в (3):

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \qquad S = v\sqrt{\frac{2h}{g}}. \qquad (5) \qquad \textbf{(1 балл)}$$

Из (5) выразим v, из (1) выразим V, и подставим всё в (2):

$$v = S\sqrt{\frac{g}{2h}}, \qquad V = \frac{m}{M}v = \frac{m}{M}S\sqrt{\frac{g}{2h}}. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

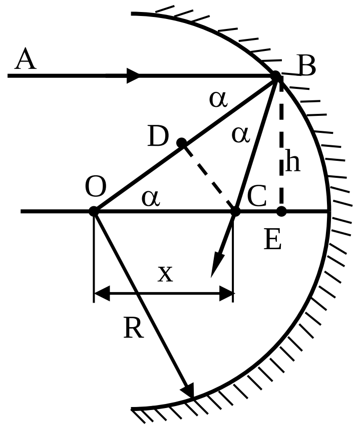
$$mgH = \frac{m}{2}\cdot\frac{g}{2h}S^2 + mgh + \frac{M}{2}\cdot\frac{g}{2h}\cdot\frac{m^2}{M^2}S^2,$$

$$H = \frac{S^2}{4h} + h + \frac{S^2}{4h}\cdot\frac{m}{M}, \qquad H = \frac{S^2}{4h}\left(1 + \frac{m}{M}\right) + h,$$

$$\frac{4h(H-h)}{S^2} - 1 = \frac{m}{M}, \qquad M = \frac{m}{\left(\frac{4h(H-h)}{S^2} - 1\right)},$$

$$M = \frac{mS^2}{4h(H-h) - S^2} \qquad \textbf{(4 балла)}$$

Ответ: $\boxed{M = \frac{mS^2}{4h(H-h) - S^2}}$



3. На сферическое зеркало радиуса $R = 5$ см падают параллельно его оптической оси два луча – один проходит от оси на расстоянии $a_1 = 0{,}5$ см, другой на расстоянии $a_2 = 3$ см. Определите

расстояние Δx между точками, в которых эти лучи пересекают оптическую ось после отражения от зеркала.

Решение:

Рисунок **(3 балла)**

Пусть O – центр сферической поверхности зеркала, ABC – луч, который падает на расстоянии BE от оси зеркала. Очевидно, $OB = R$ радиусу сферического зеркала. **(1 балл)**

Из прямоугольного треугольника OBE найдем, что $\sin\alpha = h/R$. Треугольник OBC равнобедренный, так как $\angle ABO = \angle OBC$ по закону отражения, а $\angle BOC = \angle ABO$ как внутренние, накрест лежащие углы. Отсюда $OD = DB = R/2$. **(4 балла)**

Из треугольника ODC находим $x = \dfrac{R}{2\cos\alpha} = \dfrac{R^2}{2\sqrt{R^2 - h^2}}$ (C – точка пересечения отраженного от зеркала луча с оптической осью). **(2 балла)**

Для луча, проходящего на расстоянии h_1, ввиду того что $h_1^2 \ll R^2$, $x_1 \approx R/2$ с погрешностью около 0,5%. Для луча, проходящего на расстоянии h_2, расстояние $x_2 = 3{,}125$ см. **(4 балла)**

Окончательно получим

$$\Delta x = x_2 - x_1 \approx 0{,}6 \text{ см.}$$ **(1 балл)**

Ответ: 0,6 см

4. По прямой железной дороге, располагающейся под углом α к длинной стене сплошного леса, движется поезд с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$. В тот момент, когда локомотив находится на расстоянии $\boldsymbol{l}$ от леса, машинист даёт короткий гудок. Через некоторое время машинист слышит эхо гудка, отражённое от леса. Скорость звука равна $\boldsymbol{u}$. Найдите: время, через которое с момента гудка машинист услышал эхо.

Решение:

Звук гудка идёт по пути AOB. Воспользуемся приёмом зеркального расположения источника звука (см. рисунок), тогда звук проходит такой же по длине путь, но только по прямой $A'OB$.

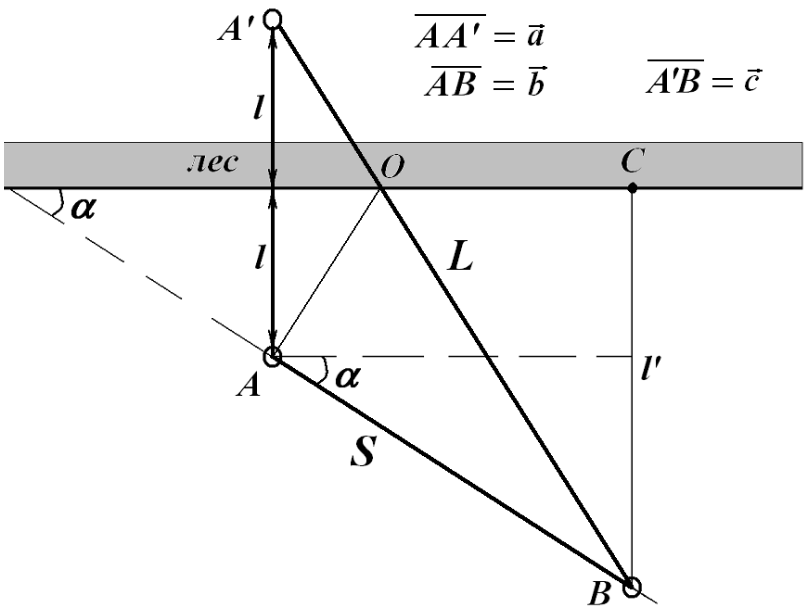


Рисунок **(3 балла)**

Согласно рисунку, расстояние $AA' = 2l$, ему соответствует вектор $\vec{a}$.

Пусть время, через которое с момента гудка машинист услышал эхо равно t.

Обозначим расстояние, которое пройдёт звук гудка со скоростью u за время t:

$$A'B = L = u \cdot t, \text{ вектор } \tilde{n}. \quad (1)$$ **(1 балл)**

Обозначим расстояние, которое пройдёт поезд со скоростью v за то же время t:

$$AB = S = v \cdot t, \text{ вектор } \vec{b}. \quad (2)$$ **(1 балл)**

Угол между отрезками AA' и AB равен $\beta = 90° + \alpha$. **(1 балл)**

Из (1) и (2) выразим L через S: $\frac{L}{S} = \frac{u}{v}$; $L = \frac{u}{v} \cdot S$. (3)

По теореме косинусов: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, а модуль вектора c можно найти по формуле:

$$\tilde{n}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\beta.$$

Воспользуемся теоремой косинусов:

$$L^2 = 4l^2 + S^2 - 2 \cdot 2l \cdot S \cdot \cos(90^\circ + \alpha)$$ **(2 балла)**

С учётом (3) и $\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$:

$$S^2 \frac{u^2}{v^2} = 4l^2 + S^2 + 4lS \cdot \sin\alpha$$

$$\frac{u^2-v^2}{v^2}S^2-4l\sin\alpha\cdot S-4l^2=0$$ **(3 балла)**

Решая квадратное уравнение относительно *S*, получим:

$$S_{1,2}=\frac{4l\sin\alpha\pm\sqrt{16l^2\sin^2\alpha+16l^2\left(\frac{u^2-v^2}{v^2}\right)}}{2\left(\frac{u^2-v^2}{v^2}\right)}=$$

$$=\frac{4lv^2\sin\alpha\pm\frac{4lv^2}{v}\sqrt{v^2\sin^2\alpha+\left(u^2-v^2\right)}}{2\left(u^2-v^2\right)}=$$ **(2 балла)**

$$=\frac{2lv^2\sin\alpha\pm 2lv\sqrt{u^2-v^2\left(1-\sin^2\alpha\right)}}{\left(u^2-v^2\right)}$$

Выбираем решение со знаком «+», и окончательно получаем:

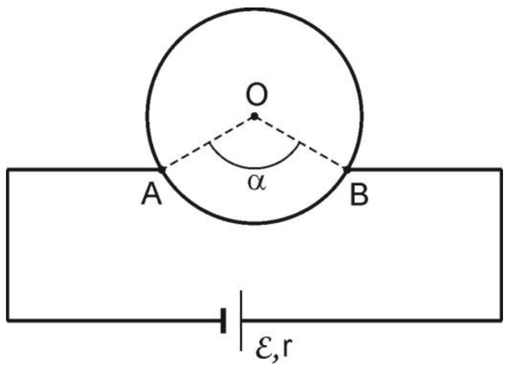
$$S=2lv\,\frac{v\sin\alpha+\sqrt{u^2-v^2\cdot\cos^2\alpha}}{\left(u^2-v^2\right)}$$ **(1 балл)**

Теперь зная пройденный путь из (2) выражаем время:

$$t=\frac{S}{v}=2l\,\frac{v\sin\alpha+\sqrt{u^2-v^2\cdot\cos^2\alpha}}{\left(u^2-v^2\right)}$$ **(1 балл)**

Ответ: $\boxed{t=2l\,\frac{v\sin\alpha+\sqrt{u^2-v^2\cdot\cos^2\alpha}}{\left(u^2-v^2\right)}}$

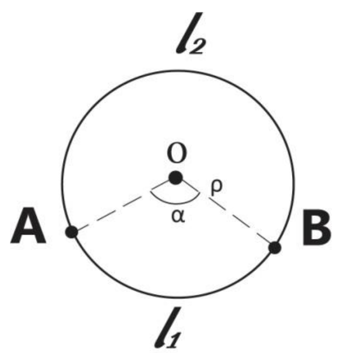
4. Из однородной проволоки с высоким сопротивлением сделали кольцо и присоединили его к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E}$ = 18 В и внутренним сопротивлением r=1 Ом так, как показано на рисунке. Когда угол α составил π/3 радиан, ток в цепи был 3 А. Определить угол α, который нужно установить для того, чтобы ток в цепи остался равным 3 А, если у источника тока будет ЭДС $\mathcal{E}$ = 27 В, а внутреннее сопротивление останется тем же.



Решение:

Согласно закону Ома для полной цепи: $\varepsilon = I\cdot(r+R)$

Пусть полное сопротивление всей проволоки кольца равно R_0, тогда сопротивление единицы длины - $\frac{R_0}{2\pi\cdot\rho}$ (ρ - радиус окружности)



Тогда:

$R_1 = \frac{R_0}{2\pi\rho} \cdot l_2;\ R_2 = \frac{R_0}{2\pi\rho} l_2$ **(2 балла)**

Но:

$l_1 = \rho\alpha;\ l_2 = \rho(2\pi - \alpha)(\alpha\ -\ \text{угол в рад.}) => R_1 = \frac{R_0\alpha}{2\pi} \qquad R_2 = \frac{R_0(2\pi-\alpha)}{2\pi}$ **(3 балла)**

Сопротивления R_1 и R_2 соединены параллельно, тогда

$R = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} = \frac{\left[\frac{R_0^2\alpha(2\pi-\alpha)}{4\pi^2}\right]}{R_0} = \frac{R_0\alpha(2\pi-\alpha)}{4\pi^2}$ **(3 балла)**

В первом случае $\alpha = \frac{\pi}{3}$:

$R = \frac{R_0}{4\pi^2} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \frac{5\pi}{3} = \frac{5R_0}{36}$ **(2 балла)**

По закону Ома:

$18 = 3\left(1 + \frac{5R_0}{36}\right) => 5 = \frac{5R_0}{36} => R_0 = 36(\text{Ом})$ **(2 балла)**

Для текущего α таким образом:

$R = \frac{36\cdot\alpha(2\pi-\alpha)}{4\pi^2} = \frac{9}{\pi^2}\alpha \cdot (2\pi - \alpha)$ **(2 балла)**

Во втором случае:

$$27 = 3 \cdot \left(1 + \frac{9}{\pi^2}\alpha(2\pi - \alpha)\right)$$

$$8 = \frac{9}{\pi^2}\alpha(2\pi - \alpha) => 8\pi^2 = 18\pi\alpha - 9\alpha^2 => 9\alpha^2 - 18\pi\alpha + 8\pi^2 = 0$$

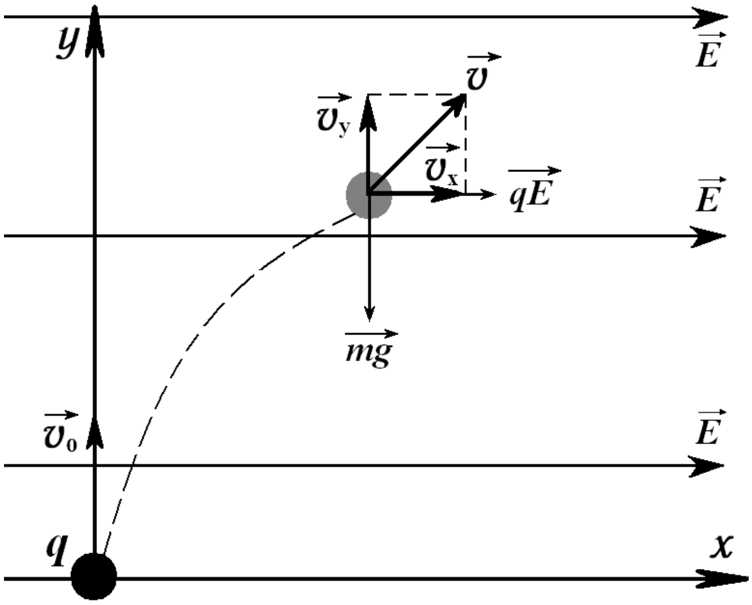
$\alpha_{12} = \frac{9\pi \pm \sqrt{81\pi^2 - 72\pi^2}}{9} = \frac{9\pi \pm 3\pi}{9} = \left[\begin{array}{l}\frac{4\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3}\end{array}\right.$ **(4 балла)**

По условию задачи нужно выбирать меньший угол (больший его дополняет до 2π) **(2 балла)**

Ответ: Новый угол составляет $\frac{2\pi}{3}$ рад $= 120°$

6. Маленький заряженный шарик массой $\boldsymbol{m}$ и зарядом $\boldsymbol{q}$, запускают вертикально вверх с начальной скоростью $\boldsymbol{v}_0$ в горизонтальном электрическом поле с напряжённостью $\boldsymbol{E}$. Определите, на какой высоте от места запуска находился шарик к моменту времени, когда его скорость была минимальной. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение:



Правильный рисунок **(2 балла)**

Сначала найдём момент времени, в который полная скорость шарика будет минимальной.

Из рисунка видно, что полный вектор скорости в любой момент времени определяется по теореме Пифагора через проекции на оси x и y:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,. \quad (1)$$ **(3 балла)**

По горизонтали на заряженный шарик действует сила со стороны электрического поля, сообщая ему ускорение:

$$a_x = \frac{qE}{m}.$$ **(1 балл)**

По вертикали на шарик действует сила тяжести, сообщая ему ускорение:

$$a_y = g\,.$$

Зависимости проекций вектора скорости от времени:

$$v_x = a_x \cdot t = \frac{qE}{m} \cdot t\,, \qquad v_y = v_0 - g \cdot t\,.$$ **(1 балл)**

Подставим последние выражения в (1):

$$v = \sqrt{\left(\frac{qE}{m}\right)^2 \cdot t^2 + v_0^2 - 2v_0 gt + g^2 t^2}\,.$$ **(2 балла)**

Для нахождения момента времени, когда полная скорость шарика будет минимальной, возьмём производную по времени от последнего выражения и приравняем её нулю (исследуем на экстремум):

$$v_t' = \frac{2\left(\frac{qE}{m}\right)^2 \cdot t - 2v_0 g + 2g^2 t}{2\sqrt{\left(\frac{qE}{m}\right)^2 \cdot t^2 + v_0^2 - 2v_0 g t + g^2 t^2}} = 0. \qquad (2) \qquad \textbf{(4 балла)}$$

Так как, время принимает конечное значение, то выражение (2) может равняться нулю, только за счёт числителя:

$$2\left(\frac{qE}{m}\right)^2 \cdot t - 2v_0 g + 2g^2 t = 0. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Выражаем время:

$$t = \frac{v_0 g m^2}{(qE)^2 + (mg)^2}. \qquad \textbf{(1 балл)}$$

Зная это время, нетрудно найти высоту, на которую поднимется шарик за это время:

$$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = v_0 \frac{v_0 g m^2}{(qE)^2 + (mg)^2} - \frac{g\left(\frac{v_0 g m^2}{(qE)^2 + (mg)^2}\right)^2}{2} =$$

$$= \frac{v_0^2 g m^2}{(qE)^2 + (mg)^2} - \frac{v_0^2 g^3 m^4}{2\left((qE)^2 + (mg)^2\right)^2} = \qquad . \qquad \textbf{(2 балла)}$$

$$= \frac{v_0^2 g m^2}{(qE)^2 + (mg)^2}\left(1 - \frac{(mg)^2}{2\left((qE)^2 + (mg)^2\right)}\right)$$

Можно продолжить преобразования:

$$y = \frac{v_0^2 g m^2}{(qE)^2 + (mg)^2}\left(\frac{2(qE)^2 + 2(mg)^2 - (mg)^2}{2\left((qE)^2 + (mg)^2\right)}\right) =$$

$$= \frac{v_0^2 g m^2}{(qE)^2 + (mg)^2}\left(\frac{2(qE)^2 + (mg)^2}{2(qE)^2 + 2(mg)^2}\right) \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Ответ: $\boxed{y = \frac{v_0^2 g m^2}{(qE)^2 + (mg)^2}\left(\frac{2(qE)^2 + (mg)^2}{2(qE)^2 + 2(mg)^2}\right)}$ или

$$\boxed{y = \frac{v_0^2 g m^2}{(qE)^2 + (mg)^2}\left(1 - \frac{(mg)^2}{2\left((qE)^2 + (mg)^2\right)}\right)}$$